

# 压缩传感技术及其应用

余国义, 郑梅军, 张 乐

(华中科技大学 光学与电子信息学院, 湖北 武汉 430074)

**摘 要:** 本文综述了一种新的信号处理方法—压缩传感(Compressive Sensing, CS), 它是针对稀疏或者可压缩信号, 在采样的同时即可对信号数据进行适当压缩的新理论. 近年来, 压缩传感理论成为信号采样及图像处理领域最新、最热点的问题之一. 它主要包括三个方面: 稀疏表示矩阵, 非相干测量矩阵以及重建算法. 本文介绍了压缩传感理论的模型, 以及压缩传感的主要重建算法, 并将实现方法进行了分析与比较. 文章最后列举出了压缩传感的主要应用领域.

**关键词:** 压缩传感; 稀疏性; 测量矩阵; 重建算法

**中图分类号:** TN919. 72

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000—7180(2013)07—0095—04

## Compressive Sensing and its Applications

YU Guo-yi, ZHENG Mei-jun, ZHANG Le

(School of Optical and Electronic Information, Huazhong University, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** This paper introduced a new signal processing method —Compressive Sensing (CS). Recently, an emerging theory of signal acquirement named Compressive Sensing become one of the hottest topics of signal sampling and image processing. It is a novel signal sampling theory under the condition that the signal is sparse or compressible. It has the ability of compressing a signal during the process of sampling. It consists of three main areas: sparse representation matrix, measurement matrix and reconstruction algorithm. This paper mainly introduces the model of Compressive Sensing, and the main reconstruction algorithms, then analyses and compares the algorithms. Finally, the paper lists the main applications of Compressive Sensing.

**Key words:** compressive sensing; sparseness; measurement matrix; reconstruction algorithm

### 1 引言

传统方式下, 奈奎斯特采样定理指出, 在进行模拟/数字信号的转换过程中, 当采样频率大于信号最高频率的 2 倍时, 采样后的数字信号才能够保留原始信号的所有信息. 随着各种信号处理系统获取数据能力的不断增强, 需要后期处理的数据量也以惊人的速度在增加. 这无疑给系统的处理能力提出了更高的要求, 同样给硬件设备的设计带来了极大的挑战.

近年来, 作为 Shannon/Nyquist 定理的另一选择, 压缩传感理论受到大家的关注.

压缩传感理论<sup>[1]</sup>在信号获取的同时, 就对数据进行适当地压缩, 而传统的信号获取和处理过程主要包括采样, 压缩, 传输以及解压缩四个部分. 压缩传感(Compressive Sensing, CS), 它把物理, 计算和数值方法有机地结合起来去解决大而复杂的问题, 它将技术负担从传感器转移到了后台处理器.

### 2 压缩传感基本原理

自然信号大多具有内在的稀疏性, 从而使得我们可以对其信号进行压缩处理. 传统的处理方法是通过对 Shannon 采样定理采集信号, 然后再构造出压缩算法对其进行压缩处理. 而压缩传感是将压缩和

收稿日期: 2012—10—03; 修回日期: 2012—11—13

基金项目: 华中科技大学自主创新研究基金(2011QN005); 教育部博士点基金(20090142120005)

采样融为一个步骤,直接采集稀疏信号,然后基于稀疏信号进行原始信号的重构. CS 理论的两个组成要素是信号的系数变换,稀疏信号的非相干测量以及稀疏信号的重建算法<sup>[2]</sup>.

压缩传感是利用信号具有稀疏性表示的先验知识,由投影获得的少量观测值来进行信号重建.

### 2.1 信号稀疏性

假定一个离散输入信号  $x \in R^N$ , 其中  $x$  是一个  $k$  稀疏信号并且可以由  $N$  维空间基  $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ , 即表达式如下所示:

$$X = \sum_{i=1}^N \Psi_i S_i = \Psi S \quad (1)$$

$\Psi = [\Psi_1 \cdots \Psi_N]$  是稀疏性矩阵,  $S = [S_1 \cdots S_N]$  是包含有  $k$  个非零系数的变换向量矩阵, 其中  $k \ll N$ . 当信号基于正交变换基  $\psi$  进行变换时, 绝大多数的变换系数变为很小, 所以变换结果  $S$  是稀疏的, 由此可以同样地推出,  $X$  是  $k$  稀疏的.

### 2.2 测量矩阵

通过压缩传感过程直接得到长度为  $M$  的测量信号  $y (M < N)$ , 且满足:

$$y = \Phi x \quad (2)$$

其中  $\Phi$  为大小为  $M \times N$  的感知矩阵, 结合  $X =$

$$\sum_{i=1}^N \Psi_i S_i = \Psi S, \text{ 于是线性测量过程也可以表示为:}$$

$$y = \Theta s \quad (3)$$

此时  $\Theta = \Phi \Psi$  为  $M \times N$  矩阵.

$\Phi$  是测量矩阵, 由于线性测量过程中未知数  $N$  大于方程个数  $M$ , 因而无法直接从  $y$  中重构出  $x$ . 如何有效地从测量信号中重构出原始信号是压缩理论中的一个关键问题, 能否完美地重构出原始信号  $x$  是衡量压缩传感过程正确与否的标准.

重建满足的条件: 观测矩阵与压缩传感矩阵必须是不相干的, 必须尽可能地使观测值包含原始信号的不同信息. 也就是说, 尽量使  $\Phi$  的矢量与  $\Psi$  的矢量尽量是正交的.

Candes 和 Tao 证明出测量矩阵<sup>[3]</sup> $\Theta$  在满足 RIP (restricted isometry property) 的条件下, 能够保证信号能精确重构. RIP 不等式如下:

$$1 - \delta(k, M, N) \leq \frac{\|\Theta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 1 + \delta(k, M, N) \quad (4)$$

其中  $\delta(k, M, N) \in (0, 1)$ , 成为限制等容系数. 当等容系数越小时, 则传感得越成功. 如果  $\delta(k, M, N) = 0$ , 则传感矩阵的所有列矢量与其它矢量都是正交的. 如果  $\delta(k, M, N) = 1$ , 则存在一个  $k$  稀疏矢

量  $x$  满足  $\Theta x = 0$ . 我们不能区别出  $x$ , 则等容系数为 1 时, 并不能精确地恢复出  $k$  稀疏信号. 当固定  $k$  和  $N$  时, 随着测量数  $m$  的增加, 则限制等容系数将会下降. 同样地, 若固定  $M$  和  $N$ , 随着稀疏度  $k$  的增加, 限制等容系数也会增加.

### 2.3 重构算法

理论证明, 对于一个  $k$  稀疏的信号, 传感矩阵满足约束等距性条件的情况下, 测量信号的长度  $m \geq ck \log(n/k)$  时, 在很大概率下原始信号可以由  $m \ll n$  测量信号重构出. 原始信号  $x$  可以通过求解一个  $l_0$  优化问题得到精确重构, 表达式如下:

$$\min \|x\|_0, \quad \text{s. t. } y = \Phi x \quad (5)$$

式中  $\|x\|_0$  表示  $x$  的  $l_0$  范数, 即  $x$  中非零值元素的个数, 也称为信号稀疏度, 用  $k$  表示. 但是式(5)是一个难解的组合优化问题. 后来 Candes 和 Donoho 等人指出信号重建可以由  $l_1$  范数最小化求解. 即

$$\min \|x\|_1, \quad \text{s. t. } y = \Phi x \quad (6)$$

式(6)是一个可解的凸优化问题.

目前的重构算法有凸优化算法, 组合算法, 统计优化算法和贪婪算法等.

## 3 压缩传感的实现方法

在压缩传感研究中, 信号的重建算法是最具有挑战性的问题之一, 在目前已经存在的重建算法中, 主要有以  $l_1$  范数为基本的基追踪算法 BP<sup>[4]</sup>, 它运用线性规划(LP) 来解决问题的. 它只需要较少的测量数据, 但是其较高的计算复杂性导致它的应用不是很广泛. 另外一种以迭代贪婪追踪为基础的算法, 目前这类算法发展起来的算法有匹配追踪算法 (Matching Pursuit, MP)、正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP), 并由此发展起来的正则化的正交匹配追踪 (Regularized OMP)、逐步正交匹配追踪 (Stagewise OMP)、基追踪算法 (subspace pursuit)、以及可压缩采样的匹配追踪 (Compressive sampling matching pursuit, CoSaMP). 这些算法在参考文献<sup>[5]</sup> 中都有具体显示. 本课题提出的是一种稀疏适应性匹配追踪算法 (Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP), 该算法在稀疏度未知的情况下也能将信号较好地恢复.

### 3.1 运用 OMP 算法对一维信号进行重构

$x = 0.3 * \cos(2\pi * 50t) + 0.6 * \cos(2\pi * 100t) + 0.1 * \cos(2\pi * 200t) + 0.9 * \cos(2\pi * 400t)$ ; 对于

该一维信号,通过快速傅里叶变换,得知其稀疏度为7. 图1是原图与OMP重建图的对比. 由图可知,重建信号与原始信号极其接近,其相对误差仅大约为 $3.6520\text{e}-18$ ,绝对误差 $6.9389\text{e}-18$ . 由此可以看出OMP算法对一维信号的重构有相当好的效果.

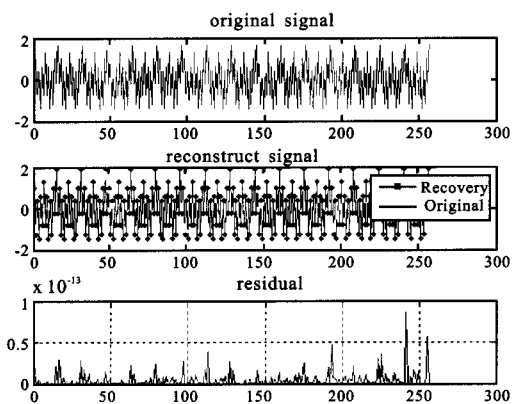


图1 信号重建效果图

### 3.2 信号恢复算法的比较

本文提出一种新的贪婪算法称为稀疏适应性匹配追踪算法(SAMP),这种算法主要是针对在稀疏度 $k$ 未知的情况下进行运用的. OMP算法和SP算法是SAMP算法的一种特殊情. SAMP在稀疏度的水平测量以及原始信号恢复的方向上,遵守“各个击破”的原则. 它的仿真结果情况基本上好于以上所列举的算法,包括BP算法. 以上所示的贪婪算法中,OMP、STOMP和ROMP采取的是自底向上的设计方法来获取 $x$ 的支撑集. 然而在另一方面,SP和CoSaMP算法则是自顶向下的设计方法. 而这些算法的共同点是信号的稀疏度 $k$ 基本上都是预先知道的. 但是在实际压缩传感过程中,这些信息可能是未知. SP和CoSaMP由于采用的自上而下的原则,因而能够较为精确地确定 $x$ 的支撑集. 从另一方面来说,OMP类型的自底向上的算法则能一步一步确定 $k$ 的精确值. 根据这些观察,我们所推荐的SAMP<sup>[6]</sup>算法,充分结合了自底向上和自上而下的优点.

从实际的角度来看,SAMP最突出的优点是不需要 $k$ 作为输入参数. 同样,从理论的角度来看,它也为信号的稳定性和精确恢复也提供了保证. 本文所探究的是高斯信号.

#### ①信号精确恢复的程度与稀疏度

在此次试验中,信号的长度 $N=256$ ,信号是属于高斯或者二进位信号. 部分傅里叶变换的测量数 $M=128$ . 此次的目标是在 $M$ 一定的情况下,探究信号精确恢复的程度与稀疏度之间的关系. 稀疏度

的范围从 $k=10$ 到 $k=70$ . 对于不同的算法,将做500次仿真来确定结果. 如图2显示出了测量结果.

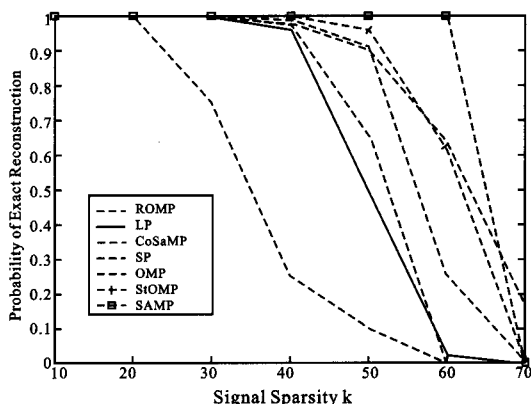


图2 信号精确恢复程度与信号的稀疏度的关系

由以上结果可以看出,对于高斯稀疏信号来说,SAMP算法所得到的结果远远高于其他算法,包括 $l_1$ 算法. 当稀疏度 $k \geq 40$ 时,其他算法的恢复度都开始下降,而直到 $k \geq 60$ 时,SAMP算法的恢复度才有下降的趋势.

但是对于二进制稀疏信号来说,SAMP、SPCoSaMP的情况都比 $l_1$ 算法要糟糕. 前者在 $k \geq 30$ 时开始出现下降,而 $l_1$ 算法在 $k \geq 40$ 时出现下降.

#### ②信号精确恢复的程度与测量数

这次实验是讨论信号精确恢复的程度与测量数之间的关系,此时则固定稀疏度 $k$ . 选定 $k=20$ , $M$ 则选择50,60,70,80,90,100. 对于每一个 $M$ ,通过稀疏度 $k$ 和 $y=\Phi x$ 来恢复信号. 使用以上算法来恢复原始信号,对于每一个 $M$ ,都将做500次测量. 如图3所示.

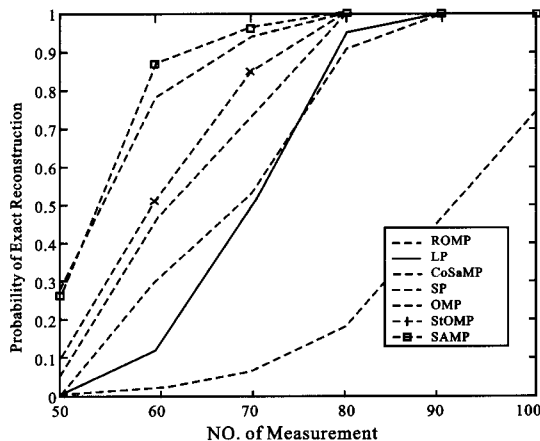


图3 精确恢复程度与信号的测量数的关系

由以上结果可得知,SAMP和 $l_1$ 算法的效果相对好一点. 我们发现,当保证信号精确恢复的测量数不够时,SAMP算法的信号精确恢复的程度主要

依赖于步长和信号类型。

现在课题组正在研究 SAMP 算法的改进算法,包括快速 SAMP 算法和稀疏自适应压缩采样算法等。

#### 4 压缩传感的应用

压缩传感应用于很多领域<sup>[7]</sup>,下面列举三个直接应用。

##### 4.1 错误纠正

当信号从一个部分转换到另外一个部分时,信号经常被编码以致产生错误。压缩传感可以从少量损坏的编码数据中恢复原始数据。错误纠正的过程如下所示。假设一个  $m$  维输入矢量  $f$ ,我们要将它传输到一个遥远的接收器。在编码过程中,我们把  $f$  当作一个“明文”。我们所传输的测量值是  $z=Af$ ,其中  $A$  是  $d \times m$  维的测量矩阵。如果  $A$  是满秩的话,那么我们可以从密文  $z$  中恢复出矢量  $f$ 。但是通常情况下,密文  $z$  可能会被扰乱。这样通过扰乱的测量矩阵  $z'=Af+e$ ,其中  $e$  为  $\in R^N$  的错误矢量。我们设置一个矩阵  $B$ ,其中矩阵  $BA=0$ 。由此可以得出  $Bz'=Be$ 。设置  $y=Bz'$ ,这样我们可以通过线性测量  $y$  来恢复错误矢量  $e$ 。因而我们可以获得真正的测试矢量  $Af$ ,由此还原出输入信号  $f$ 。

##### 4.2 图像

如今,典型的数码相机在压缩和储存图像之前记录了图像的所有像素。Si 的使用使得数码相机处理的数据量达到兆像素。但是,为什么需要获取这么多数据呢,只用保存少量数据即可。压缩传感引发了一个新的框架,只需要直接获取图像的随机线性测量值,而不再需要完整地摄取每一个像素。“单像素”相机<sup>[8]</sup>的出现掀起了压缩传感的热潮。

压缩传感在医学图像领域也有相当广泛的应用领域,磁共振(Magnetic resonance, MR)图像就是一个典型的代表。一些 MR 图像,如血管造影片就是稀疏的,另外一些复杂的 MR 图像也可以在某些基底上(例如小波和傅里叶基)呈现出稀疏的现象。针对 MR 图像,相应的压缩传感算法也已经被提出来了<sup>[9]</sup>。

##### 4.3 雷达(无线电探测器)

一个标准的雷达系统需要传输各种类型的脉冲(例如线性调频信号),然后运用匹配滤波器将接收到的信号与脉冲联系起来。接收端使用一个脉冲压缩系统,包括一个高速的模数(Analog/Digital)转换器。这种传统的方法不仅复杂而且昂贵,目标的分辨

率也因为雷达测不准原理受到限制。压缩雷达成像通过离散时频面来提高分辨率,将时频面转换成网格,并把每个可能的目标看成一个矩阵。如果目标的数量足够小,那么网格就会比较稀疏,如此以来,我们就可以运用压缩传感技术恢复出目标场景。

#### 5 结束语

本文阐述了压缩传感的原理、压缩传感的各种实现方法和压缩传感的应用,并重点将 SAMP 算法与其他算法进行了分析与比较。SAMP 最突出的优点是  $k$  未知的情况下也可以进行信号重建。针对不同的信号类型,也应该针对需求来选择相应的算法。压缩传感的发展还处于初级阶段,需要进行更深入的研究。

#### 参考文献:

- [1] Candes E, Tao T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [2] 石光明, 刘丹华, 高大化. 压缩感知理论及研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [3] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述 [J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1-7.
- [4] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011(03): 425-434.
- [5] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩传感理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011(01): 142-148.
- [6] 彭志珍. 匹配追踪算法中稀疏度的自适应研究 [D]. 武汉: 华中科技大学计算数学系, 2011.
- [7] Compressed sensing webpage. [EB/OL]. [2012-10-03]. <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs/>.
- [8] Duarte M, Davenport M, Takhar D, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 83-91.
- [9] Lustig M, Donoho D, Pauly J M. SparseMRI: the application of compressed sensing for rapid MRI imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.

#### 作者简介:



余国义, 男, (1973—), 高级工程师。研究方向为超大规模集成电路设计。